**TAREA 2: USO DEL MÉTODO DE LAS DOS FASES EN EL ALGORITMO SIMPLEX**

Camilo Enrique Farelo Panesso CC 1093793316

Katherin Johana Henao Henao CC 1036953583

Jacksson Lozano Durango CC 1039687970  
Alejandro Betancur Granados CC 98603489

**Método de las dos Fases:** es un método para obtener una solución básica factible inicial, cuando no es fácil hallarla de la forma normal simplex

**Fase I:** se considera un nuevo problema al agregar tantas variables auxiliares a las restricciones del problema, encontrando la solución por reducciones de Gauss-Jordan, hasta que el valor optimo sea cero y las variables auxiliares, se hallan eliminado.

**Fase II:** Resolver por simplex el problema original a partir de la solución básica factible hallada en la fase I. [1]

**Problema 1:** Resuelva el siguiente modelo de programación lineal

|  |  |
| --- | --- |
| Minimizar | 𝑧 = 3𝑥1 + 2𝑥2 + 4𝑥3 |
| Sujeto a | 2𝑥1 + 𝑥2 + 3𝑥3 = 60  3𝑥1 + 3𝑥2 + 5𝑥3 ≥ 120  𝑥1,𝑥2,𝑥3 ≥ 0 |

# Solución:

Forma estándar:

|  |  |
| --- | --- |
| Minimizar | 𝑧 = 3𝑥1 + 2𝑥2 + 4𝑥3 |
| Sujeto a | 2𝑥1 + 𝑥2 + 3𝑥3 = 60  3𝑥1 + 3𝑥2 + 5𝑥3 − 𝑥4 = 120  𝑥1,𝑥2,𝑥3,𝑥4 ≥ 0 |

# Modelo artificial

Se plantea un modelo con variables artificiales con el fin de buscar una solución básica factible en Fase I, debido a que las condiciones iniciales en el programa impiden usar el método SIMPEX de manera automática.

Con variables artificiales (𝑥5, 𝑥6):

|  |  |
| --- | --- |
| Minimizar | 𝑍−𝑥5−𝑥6 = 0 |
| Sujeto a | 2𝑥1 + 𝑥2 + 3𝑥3 + 𝑥5 = 60  3𝑥1 + 3𝑥2 + 5𝑥3 − 𝑥4 + 𝑥6 = 120  𝑥1,𝑥2,𝑥3,𝑥4, 𝑥5, 𝑥6 ≥ 0 |

# Fase I

Se aplicará el algoritmo SIMPLEX tomando como variables básicas las dos variables artificiales creadas anteriormente (𝑥5 𝑦 𝑥6), así:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Solución** |
| **Z** | **0** | **0** | **0** | **0** | **-1** | **-1** | **0** |
| **X5** | **2** | **1** | **3** | **0** | **1** | **0** | **60** |
| **X6** | **3** | **3** | **5** | **-1** | **0** | **1** | **120** |

Tabla 1. Fase I, ubicación de los coeficientes a reducir

Primeramente, se deben eliminar los coeficientes de las variables básicas, resaltadas en rojo, sumando las siguientes dos filas.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Solución** | **Ecuación** |
| **Z** | **5** | **4** | **8** | **-1** | **0** | **0** | **180** |  |
| **X5** | **2** | **1** | **3** | **0** | **1** | **0** | **60** | **60/3=20** |
| **X6** | **3** | **3** | **5** | **-1** | **0** | **1** | **120** | **120/5=24** |

Tabla 2. Fase I, primera iteración

En este paso, para conocer la variable entrante y la variable saliente a ser Básica, se debe ubicar en la anterior tabla el valor positivo más alto (resaltado en canela tono claro), el cual indica la columna de la variable a entrar. Posteriormente de esa columna se dividen la solución correspondiente a cada valor, representado en la misma fila para hallar el valor pivote, el cuál será el dividendo cuyo resultado sea menor, en este caso de las dos filas (resaltado en azul). Este mismo pivote indica a su vez, la fila de la variable básica saliente. Así entonces, con ayuda de la tabla 2 se puede observar que la variable saliente es **x5** y la entrante es **x3.**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Solución** | **Ecuación** |
| **Z** | **-1/3** | **4/3** | **0** | **-1** | **-8/3** | **0** | **20** |  |
| **X3** | **2/3** | **1/3** | **1** | **0** | **1** | **0** | **20** | **20/1/3=60** |
| **X6** | **-1/3** | **4/3** | **0** | **-1** | **-5/3** | **1** | **20** | **20/4/3=15** |

Tabla 3. Fase I, segunda iteración

El procedimiento descrito anteriormente, se repite hasta que la función objetivo sea cero y las variables agregadas X5 y X6 sean eliminadas.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Solución** | **Ecuación** |
| **Z** | **0** | **0** | **0** | **0** | **-1** | **-1** | **0** |  |
| **X3** | **3/4** | **0** | **1** | **1/4** | **3/4** | **-1/4** | **15** |  |
| **X2** | **-1/4** | **1** | **0** | **-3/4** | **-5/4** | **3/4** | **15** |  |

Tabla 4. Tercera iteración

La tabla 4, indica que se ha llegado a la solución factible y se puede proceder a la Fase II ya que en la ecuación de la función objetivo el resultado es 0 y x5 y x6 no tienen coeficientes positivos.

# Fase II

En este paso, como ya se había mencionado, se eliminan las variables agregadas artificiales x5 y x6 de la tabla hallada con la solución básica en Fase I, y se vuelve a la función objetivo original con las variables normales y las de holgura.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **Solución** |
| **Z** | **-3** | **-2** | **-4** | **0** | **0** |
| **X3** | **3/4** | **0** | **1** | **1/4** | **15** |
| **X2** | **-1/4** | **1** | **0** | **-3/4** | **15** |

Tabla 5. Fase II, con función objetivo original.

Análogamente a lo que se hizo en la fase I, se debe encontrar la solución óptima del problema, al hacer cero los coeficientes de las variables básicas actuales.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **Solución** |
| **Z** | **-1/2** | **0** | **0** | **-1/2** | **90** |
| **X3** | **3/4** | **0** | **1** | **1/4** | **15** |
| **X2** | **-1/4** | **1** | **0** | **-3/4** | **15** |

Tabla 6. Primera iteración

Al observar en la tabla 6, se puede notar que se llegó a la solución óptima del problema original, debido a que los coeficientes de la función objetivo en dicha tabla no son estrictamente positivos, ninguno, por tanto, se dice que la solución al problema es:

**X1=0 X2=15 X3=15**

Y la solución es 90.

# Problema 2:

Resuelva el siguiente problema de manera algorítmica (no de manera gráfica), si es posible resolverlo de forma gráfica, use (si así lo prefiere) esta solución como un medio para corroborar la respuesta realizada de manera algorítmica

* La empresa Bevco manufactura una bebida con sabor a naranja que se llama Oranj mediante la combinación de soda de naranja y jugo de naranja.
* Cada onza de soda de naranja contiene 1/2 de onza de azúcar y 1 mg de vitamina C.
* Cada onza de jugo de naranja contiene 1/4 de onza de azúcar y 3 mg de vitamina C.
* A la empresa Bevco, le cuesta 2$ producir una onza de soda de naranja y le cuesta 3$ producir una onza de jugo de naranja.
* El departamento de marketing de la empresa Bevco decidió que cada botella de 10 onzas de Oranj debe contener al menos 20 mg de vitamina C y como máximo 4 onzas de azúcar.
* Determine como puede hacer Bevco para cumplir los requisitos del departamento de marketing a un costo mínimo.

Definimos las siguientes variables para la solución del problema

𝒙𝟏: onzas de soda empleadas en una botella de 10 onzas de Oranj

𝒙𝟐: onzas de jugo empleadas en una botella de 10 onzas de Oranj Una vez definidas las variables el problema que se plantea es el siguiente:

Minimizar:

Sujeto a: ; ;

Estandarizando el problema para resolver por método SIMPLEX.

|  |  |
| --- | --- |
| Minimizar | 𝑧 = 2𝑥1 + 3𝑥2 |
| Sujeto a | 𝑥1 + 3 𝑥2 − 𝑥3 = 20  1 𝑥1 + 1 𝑥2 + 𝑥4 = 4  2 4  𝑥1 + 𝑥2 = 10  𝑥1, 𝑥2, 𝑥3, 𝑥4 ≥ 0 |

Se observa que el origen (𝒙 = (0, 0)) no es una solución factible debido a que viola la primera y tercera restricción, por lo cual se implementara el método de las dos fases.

# Modelo artificial

Generamos variables artificiales una para cada restricción con el fin de encontrar una solución básica factible, generando el siguiente problema artificial a resolver por el método SIMPLEX.

En la restricción 1 se suma la variable artificial 𝑥5 y en la restricción 3 se suma la variable artificial 𝑥6, ya que 𝑥4 solo aparece en la restricción 2 y tiene el mismo signo que su correspondiente lado derecho, entonces no es necesario agregar una variable artificial en dicha restricción.

El problema artificial es, por lo tanto:

|  |  |
| --- | --- |
| Minimizar | 𝑍 − 𝑥5 − 𝑥6 |
| Sujeto a | 𝑥1 + 3 𝑥2 − 𝑥3 + 𝑥5 = 20  1 𝑥1 + 1 𝑥2 + 𝑥4 = 4  2 4  𝑥1 + 𝑥2 + 𝑥6 = 10  𝑥1, 𝑥2, 𝑥3, 𝑥4, 𝑥5, 𝑥6 ≥ 0 |

# Fase I

La primera tabla a construir será, para la primera Fase, la siguiente:

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Sln** |
| **Z** | **0** | **0** | **0** | **0** | **-1** | **-1** | **0** |
| **X4** | **1/2** | **1/4** | **0** | **1** | **0** | **0** | **4** |
| **X5** | **1** | **3** | **-1** | **0** | **1** | **0** | **20** |
| **X6** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **10** |

Tabla 7. Ubicación de los coeficientes a reducir.

Siguiendo los pasos para la reducción de términos como en anterior numeral, se tienen las siguientes iteraciones.

Primeramente, se reducen los términos negativos de las variables básicas X5 y X6 de la función objetivo, por medio de suma de Gauss-Jordan

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Sln** | **Ecu.** |
| **Z** | **2** | **4** | **-1** | **0** | **0** | **0** | **30** |  |
| **X4** | **1/2** | **1/4** | **0** | **1** | **0** | **0** | **4** | **4/1/4=16** |
| **X5** | **1** | **3** | **-1** | **0** | **1** | **0** | **20** | **20/3=6.667** |
| **X6** | **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **10** | **10/1=10** |

Tabla 8. Primera iteración.

La variable saliente es x5 y la entrante es x2, con un pivote de 3(celda remarcada en azul. Tabla 8) y un tamaño de paso de λ= 6.6667.

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Sln** | **Ecu.** |
| **Z** | **2/3** | **0** | **1/3** | **0** | **-4/3** | **0** | **10/3** |  |
| **X4** | **5/12** | **0** | **1/12** | **1** | **-1/12** | **0** | **28/12** | **28/12/5/12=5.6** |
| **X2** | **1/3** | **1** | **-1/3** | **0** | **1/3** | **0** | **20/3** | **20/3/1/3=20** |
| **X6** | **2/3** | **0** | **1/3** | **0** | **-1/3** | **1** | **10/3** | **10/3/2/3=5** |

Tabla 9. Segunda iteración

La variable saliente según la tabla 9 es x6 y la entrante es X1, con un tamaño de paso de λ=5.

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **X5** | **X6** | **Sln** |
| **Z** | **0** | **0** | **0** | **0** | **-1** | **-1** | **0** |
| **X4** | **0** | **0** | **-3/24** | **1** | **3/24** | **-15/24** | **1/4** |
| **X2** | **0** | **1** | **-1/2** | **0** | **1/2** | **-1/2** | **5** |
| **X1** | **1** | **0** | **1/2** | **0** | **-1/2** | **3/2** | **5** |

Tabla 10. Tercera iteración

Como se puede observar en la tabla 10, las variables agregadas fueron sacadas de entre las variables básicas y la función objetivo es cero, por tanto, se puede proceder a la Fase II, al obtener la función básica factible.

# Fase II.

En este paso, como ya se había mencionado, se eliminan las variables agregadas artificiales x5 y x6 de la tabla hallada con la solución básica en Fase I, y se vuelve a la función objetivo original con las variables normales y las de holgura.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **Sln** |
| **Z** | **-2** | **-3** | **0** | **0** | **0** |
| **X4** | **0** | **0** | **-3/24** | **1** | **1/4** |
| **X2** | **0** | **1** | **-1/2** | **0** | **5** |
| **X1** | **1** | **0** | **1/2** | **0** | **5** |

Tabla11. Fase II, con función objetivo original

Análogamente a lo que se hizo en la fase I, se debe encontrar la solución óptima del problema, al hacer cero los coeficientes de las variables básicas actuales.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  | **X1** | **X2** | **X3** | **X4** | **Sln** |
| **Z** | **0** | **0** | **-1/2** | **0** | **25** |
| **X4** | **0** | **0** | **-3/24** | **1** | **1/4** |
| **X2** | **0** | **1** | **-1/2** | **0** | **5** |
| **X1** | **1** | **0** | **1/2** | **0** | **5** |

Tabla 12. Primera iteración, fase II

De la tabla 12, se puede observar que no es posible optimizar más, por tanto, el valor óptimo del problema se obtiene cuando X1 y X2 valen 5, y la función objetivo será 25.